经典不等式公式--简化版

1. 均值不等式链

1.1 重要不等式: $\forall a,b\in R, a^2+b^2\geq 2ab$ 当且仅当$a=b$时,等号成立

1.2 均值不等式常见形式: 对于 $a>0,b>0,c>0$, 有

$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\leq\sqrt{ab}\leq\frac{a+b}{2}\leq\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$
$$\frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}\leq\sqrt[3]{abc}\leq\frac{a+b+c}{3}\leq\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}\leq\sqrt[3]{\frac{a^3+b^3+c^3}{3}}$$

当且仅当$a=b=c$时,等号成立

1.3 n维形式: 假设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 都是正数, 有

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\cdots+\frac{1}{x_n}}\leq\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}\leq\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\leq\sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}{n}}\leq\sqrt[n]{\frac{x_1^n+\cdots+x_n^n}{n}}$$

当且仅当$x_1=x_2=\cdots=x_n$ 时,等号成立

1.4 加权的形式:

> 假设 $\omega_i\geq 0$ 且$\sum_{i=1}^n\omega_i=1\ \ (i=1,2,\cdots,n)$, 那么有 $\sum_{i=1}^n w_ix_i\geq\prod_{i=1}^n x_i^{w_i}$ 当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$时, 等号成立.

常见加权的形式:

$$\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{a}+\sqrt{b}$$
$$\frac{a+b+c}{3}\geq\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}$$

2. 柯西不等式

$$(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2)\geq(a_1b_1+a_2b_2)^2 \qquad \text{(二维形式)}$$

$$(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)\geq(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2 \qquad \text{(二维形式)}$$

$$(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)\geq(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2 \qquad \text{(n维形式)}$$

当且仅当 $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\ldots=\frac{a_n}{b_n}$ 时,等号成立

3. 权方和不等式

对于$\forall a_i > 0, b_i > 0, m > 0$, 有

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} \geqslant \frac{\left(a_1 + a_2\right)^2}{b_1 + b_2} \tag{二维形式}$$

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \frac{a_3^2}{b_3} \geqslant \frac{\left(a_1 + a_2 + a_3\right)^2}{b_1 + b_2 + b_3} \tag{三维形式}$$

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \cdots + \frac{a_n^2}{b_n} \geqslant \frac{\left(a_1 + a_2 + \cdots + a_n\right)^2}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n} \tag{n维形式}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^{m+1}}{b_i^m} \geq \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^{m+1}}{\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)^m} \tag{更加一般的情形}$$

当且仅当 $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n}$ 时,等号成立

经典不等式公式--简化版练习题

1. 赋值法比较大小

> 如果是选择题, 直接用赋值法来排除错误选项

例1. 不等式 $\left|\frac{x-2}{x}\right|>\frac{x-2}{x}$ 的解集是（ ）

A. $(0,2)$　　B. $(-\infty,0)$　　C. $(2,+\infty)$　　D. $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

2. 不等式链

> 若题目中,可以看到 两个数和为常数, 或 两个数的平方和为常数 或者 两个数的积为常数, 可采用基本不等式

例1. 若 x,y 均为正数，且 $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1$，则 xy 的最大值为

例2. 若 x,y 是正数，则 $\left(x+\frac{1}{2y}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2x}\right)^2$ 的最小值是

例3. 设正实数 a、b 满足 $a+b=1$，则下列说法错误的是（ ）

A. $\sqrt{ab}$ 有最大值 $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{a+2b}+\frac{1}{2a+b}$ 有最小值 3

C. a^2+b^2 有最小值 $\frac{1}{2}$　　D. $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ 有最大值 $\sqrt{2}$

例4. $\frac{4x^2+9y^2+12xy}{x^2+y^2}$ 的最大值为?　　答: 13

例5. 实数 a，b 满足 $a>0$，$b>0$，$a+b=4$，则 $\frac{a^2}{a+1}+\frac{b^2}{b+1}$ 的最小值是　(PS: 也可以用权方和不等式)

3. 乘1法

> 若题中出现如下情况之一, 则可采用乘1法
>
> ① $ax+by=c$　　② $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=c$　　③ $ax+by=cxy$ (此形式,等价形式②)

例1. 若 a,b 均为正数，$a+2b=1$，求 $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}$ 的最小值为　(PS: 也可以用权方和不等式)

例2. 若正数 x,y 满足 $2x+y-3=0$，则 $\frac{x+2y}{xy}$ 的最小值为

例3. 若 x,y 均为正数，满足 $x+3y=5xy$，则 $3x+4y$ 的最小值为

例4. 若 a,b 均为正数，$\frac{2}{3a+b}+\frac{1}{a+2b}=4$，那么 $7a+4b$ 的最小值是　(可以换元,把分母看做 m 和n，也可以用用权方和不等式)

例5. 已知 $m \geq 0, n \geq 0$ ，且 $m+n=1$ ，则 $\dfrac{m^2}{m+2}+\dfrac{n^2}{n+1}$ 的最小值为

> 提示: 每个分式都是二次比一次形式, 可分别进行整理化简,然后再分析，还可利用权方和不等式

4. 求ax+by 的最值问题

4.1 求ax+by 的最值问题且已知的条件 ---- 有平方的形式

> **思路:** 可以采用 凑平方,然后对乘积项利用均值不等式, 具体步骤如下:
>
> 1. 凑平方,即把已知条件凑成平方, 即 $(ax+by)^2 \pm d \cdot xy = c$, 然后变形, 右边只保留xy的乘积项, 即: $(ax+by)^2 - c = d \cdot xy$
> 2. 然后对乘积项使用均值不等式, 即 $(ax+by)^2 - c = \dfrac{d}{ab} \cdot ax \cdot by \leq (\dfrac{ax+by}{2})^2$
> 3. 最后,利用换元令 $t=(ax+by)$,去分析即可

例1. 若实数 x, y 满足 $x^2+y^2+xy=1$ ，则 $x+y$ 的最大值为

例2. 若实数 x, y 满足 $4x^2+y^2-3xy=1$ ，则 $2x+y$ 的最大值为　　答: $2\sqrt{2}$

例3. 若实数 x, y 满足 $x^2+4y^2+xy=1$，则 $x+2y$ 的最大值为

4.2 求ax+by 的最值问题且已知的条件 ---- 无平方的形式

> 思路: 一般采用 因式分解 + 均值不等式. 若求 $ax+by$ 的最值
>
> ① 因式分解: 则因式分解要分解成 $(ax+c_1)(by+c_2)=c_3$ 的形式 (可以用待定系数法确定c_1, c_2, c_3的值)
>
> ② 在利用均值不等式, $(ax+c_1)+(by+c_2) \geq 2\sqrt{(ax+c_1)(by+c_2)}=2\sqrt{c_3}$
>
> ③ 进一步分析, 确定取等情况

例1. 设 $x>\frac{1}{2}, y>1, 2xy-2x-y=1$，那么 $2x+y$ 的最小值为　　答 $2+2\sqrt{2}$

例2. 设 $x>0, y>0, x+2y+2xy=8$，那么 $x+2y$ 的最小值为　　答: 4

例3. 设 $x, y \in R^+$, 且 $xy+2x+y=4$，那么 $x+y$ 的最小值为

例4. 已知 x, y 均为正数，且 $x+3y+2xy=4$，则 $3x+2y$ 的最小值是　　答: $\sqrt{66}-\dfrac{11}{2}$

5. 消元法解不等式

> 消元法思路：一般用x来表示y，然后带入y进行消元

例1. 已知 $2x+3y=12$，且 x, y 均为正数，则 xy 的最大值为　　(PS: 也可以直接用均值不等式)

例2. 已知 x, y 均为正数，且 $x+3y+2xy=4$，则 $3x+2y$ 的最小值是

6 . 分式型函数求最值

形式1: 一次比一次　　----- (PS: 暂时不讲)

形式2: 二次比一次, 一次比二次, 二次比二次

> 解题思路: (二次比二次 可以转为 一次比二次)
> 对于: (二次比一次)
> 第一步: 基本思路,配凑法,
> 第二步: 把分子凑成分母的形式,
> 第三步: 然后利用均值不等式去求解
>
> 对于(一次比二次)
> 也是配凑法
> 把分母凑成分子的形式,
> 然后利用均值不等式去求解

例1. 求 $\dfrac{x^2+4x-3}{x-2}(x>2)$ 的最小值

例2 求 $\dfrac{x^2+x}{x-1}(x>1)$ 的最小值　答 $2\sqrt{2}+3$

例3. 求 $\dfrac{x-3}{x^2-x+3}(x>3)$ 的最大值为　答 $\dfrac{1}{11}$

例4. 求 $\dfrac{x^2+2x+3}{x^2+x+2}$ 的最大值

例5 : 求 $\dfrac{x^2+1}{x^2-x+1}(x>0)$ 的最大值

7. 柯西不等式和权方和不等式

例1. 设 $a,b\in R$, 且 $a^2+b^2=10$ ，求 $3a+b$ 的最大值.

例2. 已知 $x+y+z=1$ ，且 $x,y,z\in R^+$

(1) 求 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$ 的最小值

(2) 求 $\frac{1}{x}+\frac{9}{y}+\frac{25}{z}$ 的最小值

(3)求 $x^2+2y^2+3z^2$ 的最小值.

例3. 设 $x,y,z\in R$ ，若 $2x-3y+z=3$ ，则 $x^2+(y-1)^2+z^2$ 的最小值为

例4. 设 a, b, c 均为正数，且 $a+b+c=9$ ，则 $\dfrac{4}{a}+\dfrac{9}{b}+\dfrac{16}{c}$ 的最小值为

例5. 设 a, b, c 均为正数，且 $a+2b+3c=2$ ，则 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{b}+\dfrac{3}{c}$ 的最小值　答: 18

双根号问题

例1. 求$\sqrt{2x-1}+\sqrt{5-2x}\left(\frac{1}{2}<x<\frac{5}{2}\right)$ 的最大值为　答: $2\sqrt{2}$

> 思路: 对于双根号问题. 可以用平方法或者柯西不等式, 注意根号要大于等于0

例2. 求$4\sqrt{x-2}+\sqrt{9-3x}$ 的最大值

例3. 求$5\sqrt{x-1}+\sqrt{10-2x}$ 的最大值.

例4. 设 $x>0,y>0,x+y=3$，则 $\sqrt{x+1}+\sqrt{y+5}$ 的最大值为　答: $3\sqrt{2}$

利用权方和不等式来证明

例1. 设 a,b,c 为正数且各不相等，求证: $\frac{2}{a+b}+\frac{2}{b+c}+\frac{2}{c+a}>\frac{9}{a+b+c}$

例2. 若 $a>b>c$，求证: $\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}\geq\frac{4}{a-c}$

权方和不等式

例1. 当$0<x<1$时,求 $\frac{1}{x}+\frac{4}{1-x}$ 的最小值

例2. 已知 $x>0,y>0$, 且 $2x+y=1$, 求 $\frac{2}{x}+\frac{1}{y}$ 的最小值

例3. 求$2x^2+\dfrac{8}{x^2+1}$的最小值

例4. 已知 $x,y>0$，若 $x+y=1$，则 $\dfrac{x^2+4}{x}+\dfrac{y^2+4}{y}$ 的最小值是

例5 已知 $x>0,y>0,$ 且 $x+y=1,$ 求 $\dfrac{4}{x+1}+\dfrac{1}{y}$ 的最小值

例6. 已知正数 a,b 满足 $a+b=1,$ 则 $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{8}{b^2}$ 的最小值为?

例7. 已知a, b $>0,a+2b=1,$ 求 $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{2}{b^2}$ 的最小值.