由于网页公式显示可能存在某些问题，可以下载该pdf文件

## 1. 一元二次函数/方程 ---- 十字相乘法

## 2. 基本因式分解

$$
\begin{aligned}
a^2-b^2&=(a+b)(a-b)\\
(a\pm b)^2&=a^2\pm 2ab+b^2\\
(a\pm b)^3&=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3\\
(a\pm b)^4&=a^4\pm 4a^3b+6a^2b^2\pm 4a^3b+b^4\\
b^n-a^n&=(b-a)(b^{n-1}a^0+b^{n-2}a^1+\ldots+b^0a^{n-1})
\end{aligned}
$$

## 3. 绝对值问题

$$
|a|=\begin{cases} a, & a>0\\ 0, & a=0\\ -a, & a<0 \end{cases} \qquad\qquad |a|=\sqrt{a^2}
$$

## 4. 一元二次方程：$y=ax^2+bx+c \quad (a\neq 0)$

求根公式：

$$
x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad (求根公式)
$$

韦达定理：

$$
\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}\\ x_1x_2=\dfrac{c}{a} \end{cases}
$$

## 5.如何快速的对一元三次函数进行因式分解

$$
ax^3+bx^2+cx+d
$$

- 方法一：直接利用公式化简，比如：立方和，立方差，和(差)的立方

  立方和公式：$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

  立方差公式：$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

  和的立方：$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

  差的立方：$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$
- 方法二：尝试法

    - ①如果方程为整系数多项式，而$\frac{r}{s}$是它的一个有理根，其中 $s|a, r|d$ ，
        - 特别的，$a=1$，则三次方程的有理根一定是$d$的因子
    - 如果步骤①能找到有理根，则可以利用待定系数法进行分析
- 方法三：如果方法二失败了，则该函数不能进行有理数的因式分解(PS，高中不讨论无理数的因式分解)

### 5.1 一元三次进行因式(求根)分解 --- 例子

① $x^3-x^2-2x+2=0$

> 分析：因此三次项系数为1(即a=1)，故该方程的有理根一定是2的因子，故有 $\pm1,\pm2$
>
> 我们可以把$\pm1,\pm2$ 带入 $x^3-x^2-2x+2$ 中，如果该式子为等于0 ，则一定为因子，
>
> 不难发现，这个方程的有理根只有1

(待定系数法) 方程左边可以写成，(下列系数$A$为待定,其中三次项系数和常数项系数可以直接参考给出)

$$\begin{aligned}
x^3-x^2-2x+2 &= (x-1)(x^2+A\cdot x-2)\\
x^3-x^2-2x+2 &= x^3+A\cdot x^2-2x-x^2-A\cdot x+2\\
x^3-x^2-2x+2 &= x^3+(A-1)\cdot x^2-(2+A)\cdot x+2 \quad (\text{合并同类项})
\end{aligned}$$

所以，方程的左边系数 理论上应该等于 方程右边的系数，故

$$\begin{cases}-1=A-1\\ 2=2+A\end{cases} \quad \Rightarrow \quad A=0$$

故，可以有如下因式分解

$$x^3-x^2-2x+2=(x-1)(x^2-2)=0$$

② $3x^3+x^2+x-2=0$

> 分析： 由于三次项的系数不为1，故该方程的有理根只有可能是： $\pm1,\pm2,\pm\frac{1}{3},\pm\frac{2}{3}.$
>
> 可以验证，只有 $\frac{2}{3}$ 是该方程的有理根

(待定系数法) 方程左边可以写成，(下列系数$A$为待定,其中三次项系数和常数项系数可以直接参考给出)

$$3x^3+x^2+x-2=(x-\frac{2}{3})(3x^2+Ax+3)$$

$$3x^3+x^2+x-2=3x^3+Ax^2+3x-2x^2-\frac{2}{3}Ax-2 \qquad (展开)$$

$$3x^3+x^2+x-2=3x^3+(A-2)x^2+(3-\frac{2}{3}A)x-2 \qquad (合并同类项)$$

所以，方程的左边系数 理论上应该等于 方程右边的系数，故

$$\begin{cases}1=A-2\\1=3-\frac{2}{3}A\end{cases} \quad \Rightarrow \quad A=3$$

故，可以有如下因式分解

$$x^3-x^2-2x+2=(x-\frac{2}{3})(3x^2+3x+3)=(3x-2)(x^2+x+1)=0$$

**练习：** 把下列各式分解因式

(1)$x^3-3x^2+4$

(2)$x^3-2x+1$

(3) $x^3+x+2$

(4) $x^3-x^2-x-2$

## 6．待补充