1．已知函数$f(x)=\frac{ax+b}{x^2+4}$是定义在$(-2,2)$上的奇函数，且$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{2}{17}$.

(1)求函数$f(x)$的解析式；

(2)证明：函数$f(x)$在区间$(-2,2)$上单调递增；

(3)若$f(a+1)+f(1-2a)>0$，求实数a的取值范围.

【分析】(1) 由于$f(x)$是定义在$(-2,2)$上的奇函数，有$f(0)=0$，再结合$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{2}{17}$，联立方程组即可求解

（2）利用单调性的定义，结合作差法即可证明；

（3）利用奇函数的性质得到$f(a+1)>f(2a-1)$，再利用(2)中结论去掉f即可求解；特别强调，去掉f时要注意定义域的范围.

【解】(1) 由于$f(x)$是定义在$(-2,2)$上的奇函数，一定有$f(0)=0$，所以有

$$\begin{cases}f(0)=0\\ f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{2}{17}\end{cases}\ \text{解得}\ \begin{cases}b=0\\ a=1\end{cases},\ \therefore f(x)=\frac{x}{x^2+4}.$$

（2）$\forall x_1,x_2\in(-2,2)$且$x_1<x_2$，

有$f(x_1)-f(x_2)=\frac{x_1}{x_1^2+4}-\frac{x_2}{x_2^2+4}=\frac{x_1(x_2^2+4)-x_2(x_1^2+4)}{(x_1^2+4)(x_2^2+4)}=\frac{(x_2-x_1)(x_1x_2-4)}{(x_1^2+4)(x_2^2+4)}$，

$\because -2<x_1<x_2<2$，$\therefore x_2-x_1>0, x_1x_2-4<0$，

$\therefore f(x_1)-f(x_2)<0$，即$f(x_1)<f(x_2)$，

所以函数$f(x)$在区间$(-2,2)$上单调递增.

（3）因为$f(x)$为奇函数,

由$f(a+1)+f(1-2a)>0$，

得$f(a+1)>-f(1-2a)=f(2a-1)$，

又因为函数$f(x)$在区间$(-2,2)$上单调递增，

所以$\begin{cases}-2<a+1<2\\ -2<2a-1<2\\ a+1>2a-1\end{cases}$，解得$\begin{cases}-3<a<1\\ -\frac{1}{2}<a<\frac{3}{2}\\ a<2\end{cases}$，故$-\frac{1}{2}<a<1$，

所以实数a的取值范围是$\left(-\frac{1}{2},1\right)$

2．已知函数$f(x)=\frac{3x+7}{x+2}$，$x\in[-1,1]$.

(1)用单调性定义证明$f(x)$在$[-1,1]$上单调递减，并求出其最大值与最小值；

(2)若$f(x)$在$[-1,1]$上的最大值为m，且$a+b=m(a>0,b>0)$，求$\frac{b}{a}+\frac{4}{b}$的最小值.

【分析】(1)根据函数单调性的定义证明，再结合单调性求最值即可；

(1)根据(1)得$m=4$，进而利用基本不等式整体代换的用法求解即可.

【解】(1) $\forall x_1,x_2\in[-1,1]$且$x_1<x_2$，有

$f(x_1)-f(x_2)=\frac{3x_1+7}{x_1+2}-\frac{3x_2+7}{x_2+2}=\frac{(3x_1+7)(x_2+2)-(x_1+2)(3x_2+7)}{(x_1+2)(x_2+2)}=\frac{x_2-x_1}{(x_1+2)(x_2+2)}$

因为$x_1,x_2\in[-1,1]$且$x_1<x_2$，所以$x_2-x_1>0$，$(x_1+2)(x_2+2)>0$，

所以$\frac{x_2-x_1}{(x_1+2)(x_2+2)}>0$，即$f(x_1)>f(x_2)$，所以$f(x)$在$[-1,1]$上单调递减，

所以$f(x)_{\max}=f(-1)=4$，$f(x)_{\min}=f(1)=\frac{10}{3}$.

（2）由（1）知$f(x)$在$[-1,1]$上的最大值为$m=4$， 所以$a+b=4(a>0,b>0)$，

所以$\frac{b}{a}+\frac{4}{b}=\frac{b}{a}+\frac{a+b}{b}=\frac{b}{a}+\frac{a}{b}+1\geq 2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}}+1=3$

当且仅当$\begin{cases}\frac{b}{a}=\frac{a}{b}\\ a+b=4\end{cases}$，即$\begin{cases}a=2\\ b=2\end{cases}$时等号成立，所以$\frac{b}{a}+\frac{4}{b}$的最小值为 3.

3. 若不等式$x^2-(m-2)x+m-2\geq 0$对任意$-2\leq x\leq 2$恒成立，求 m 的取值范围；

【分析】对于恒成立问题共讲解了三类题型,分别是.

① 函数$f(x)$在 R 上恒成立

② 函数$f(x)$在区间上恒成立 ---- 该问题有两种解法，分离参数法 和数形结合法

③ 已知参数范围，$f(x)$ 恒成立

该问题的恒成立问题属于第二类问题---函数$f(x)$在区间上恒成立

【解】(数形结合) 令$f(x)=x^2-(m-2)x+m-2$，其对称轴$x=\frac{m-2}{2}$

① 当$\frac{m-2}{2}<-2$时，即$m<-2$，此时$f(x)$在[-2,2]上单调递增，所以

$f(x)_{min}=f(-2)\geq 0$，解得 $m>\frac{2}{3}$，所以此时为空集

② 当$-2\leq\frac{m-2}{2}\leq 2$时，即$-2\leq m\leq 6$，此时$f(x)_{min}=f\left(\frac{m-2}{2}\right)\geq 0$

解得 $2\leq m\leq 6$，所以此时为 $2\leq m\leq 6$

(方法二，这里对称轴在[-2,2]之间，要想恒成立，只需$\Delta\leq 0$即可,但不推荐这种写法,建议直接用在对称轴处取得最小值，只需该最小值大于等于 0 即可)

③ 当$\frac{m-2}{2}>2$时，即$m>6$，此时$f(x)$在[-2,2]上单调递减，所以

$f(x)_{min}=f(2)\geq 0$，解得 $m<6$，所以此时为空集

综上所述, m 的取值范围为[2,6]